

Devoir de mathématiques n°1 (TS) - Correction

Exercice1

On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$, par $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. Démontrer que f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, $u_n \geq 1$.

Solution

1. On calcule $f(u_n)$: $f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n + 1} = u_{n+1}$.

2. On calcule la dérivée de f sur $[0 ; +\infty[$:

$$f = \frac{u}{v}$$

avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = x + 1$, deux fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$.
 f' est donc dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

$f'(x)$ est positive sur $[0 ; +\infty[$, donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

3. • Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on note $P(n) : u_n \geq 1$.

• **Initialisation.** On vérifie que la propriété est vraie pour $n = 0$.

$u_0 = 3$, donc $u_0 \geq 1$. $P(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit k un entier naturel. On suppose que $P(k)$ est vraie (hypothèse de récurrence) c'est-à-dire que $u_k \geq 1$.

On veut démontrer que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geq 1$.

On a, par hypothèse de récurrence, $u_k \geq 1$.

• On applique à chaque membre la fonction croissante f :

$$f(u_k) \geq f(1).$$

$$\text{Or } f(u_k) = u_{k+1} \text{ et } f(1) = \frac{2 \times 1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

On trouve donc $u_{k+1} \geq 1$.

La propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2

Soit $P(n)$ la propriété définie par : " $V_n = 7 - 3 \times 2^n$ "; $n \in \mathbb{N}$

Initialisation ($n=0$)

$$7 - 3 \times 2^0 = 7 - 3 \times 1 = 7 - 3 = 4 = V_0$$

d'où la propriété $P(n)$ est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit k un entier naturel quelconque fixé

Supposons que $P(k)$ soit vraie c'est à dire $V_k = 7 - 3 \times 2^k$

Démontrons que $P(k+1)$ l'est aussi

$$V_{k+1} = 2 V_k - 7$$

$$= 2(7 - 3 \times 2^k) - 7 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= 14 - 2 \times 3 \times 2^k - 7$$

$$= 7 - 3 \times 2^{k+1}$$

d'où si $P(k)$ est vrai alors $P(k+1)$ l'est aussi.

Conclusion

la propriété $P(n)$ est vraie au rang $n=0$ et est héréditaire
donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n

c'est à dire $V_n = 7 - 3 \times 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}$,

Exercice3

```
1 def démarrer_1():  
2     u=2;n=0  
3     while  $u \leq 4$ :  
4          $u = (2/3)*u + (1/3)*n + 1$   
5         n=n+1  
6     return  $u$ .
```