

Exercice 1

1) $u_0 = 2500$

$$u_1 = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times u_0 + 100 = 0,9 u_0 + 100 = 0,9 \times 2500 + 100 = 2350$$

2) $u_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right) u_n + 100 = 0,9 u_n + 100$

3) a) Soit $P(n)$ la propriété pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

Initialisation ($n=0$)

$$u_0 = 2500; u_1 = 2350$$

$$\text{d'où } 1000 \leq u_1 \leq u_0$$

donc $P(n)$ est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit k un entier naturel quelconque fixé

Supposons que $P(k)$ soit vraie c'est à dire " $1000 \leq u_{k+1} \leq u_k$ "

Démontrons que $P(k+1)$ l'est aussi c'est à dire " $1000 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ "

$$1000 \leq u_{k+1} \leq u_k \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$0,9 \times 1000 \leq 0,9 u_{k+1} \leq 0,9 u_k$$

$$900 + 100 \leq 0,9 u_{k+1} + 100 \leq 0,9 u_k + 100$$

$$1000 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$$

donc si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ l'est aussi.

Conclusion

La propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}; 1000 \leq u_{n+1} \leq u_n$

b) la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1000 donc la suite (u_n) est convergente d'après la question 3.a)

4. a) Montrons que (v_n) est géométrique

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0,9 u_n + 100 - 1000 \\ &= 0,9 u_n - 900 \\ &= 0,9 (v_n + 1000) - 900 \quad \text{car } u_n = v_n + 1000 \\ &= 0,9 v_n + 900 - 900 \\ &= 0,9 v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$
et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = 2500 - 1000 = 1500$

b) Expression de v_n puis de u_n

$$v_n = v_0 \times q^n = \underline{1500 \times 0,9^n}$$

$$u_n = v_n + 1000 = \underline{1500 \times 0,9^n + 1000}$$

Exercice 2

1) On utilise la formule de probabilités totales

$$\begin{aligned} p_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(\bar{G}_1 \cap G_2) \\ &= P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) + P(\bar{G}_1) \times P_{\bar{G}_1}(G_2) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{8} = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{m+1} = P(G_{m+1}) &= P(G_m \cap G_{m+1}) + P(\bar{G}_m \cap G_{m+1}) \\ &= P(G_m) \times P_{G_m}(G_{m+1}) + P(\bar{G}_m) \times P_{\bar{G}_m}(G_{m+1}) \\ &= p_m \times \frac{1}{4} + (1 - p_m) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} p_m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_m \\ &= \frac{1}{4} p_m - \frac{2}{4} p_m + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} p_m + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) a) Montrons que (u_n) est une suite géométrique

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= p_{m+1} - \frac{2}{5} \\ &= -\frac{1}{4} p_m + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\ &= -\frac{1}{4} p_m + \frac{5}{10} - \frac{4}{10} \\ &= -\frac{1}{4} p_m + \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= -\frac{1}{4} \left(u_n + \frac{2}{5} \right) + \frac{1}{10} \quad \text{car } p_n = u_n + \frac{2}{5} \\
 &= -\frac{1}{4} u_n - \frac{2}{20} + \frac{1}{10} \\
 &= -\frac{1}{4} u_n - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \\
 &= -\frac{1}{4} u_n
 \end{aligned}$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{4}$

Expression de u_n

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_1 \times q^{n-1} \quad \text{avec } u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} \\
 &= \frac{5}{20} - \frac{8}{20} = -\frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{d'où } u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$$

b. Expression de p_n

$$p_n = u_n + \frac{2}{5} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$$

c. Limite de la suite (p_n) et interprétation

$$-1 < -\frac{1}{4} < 1 \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

La probabilité de victoire du joueur tend vers 40% quand le nombre de parties est très grand.

Exercice 3

1) $u_0 = 1$

$$u_1 = -0,02 \times u_0^2 + 1,3 \times u_0$$

$$= -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = -0,02 + 1,3 = 1,28$$

D'après ce modèle, au 1^{er} Juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.

2) a) Montrons que h est croissante sur $[0; 20]$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \in [0; 20], \quad h'(x) &= -0,02 \times 2x + 1,3 \\ &= -0,04x + 1,3 \end{aligned}$$

$$\text{Or } h'(x) \geq 0$$

$$-0,04x + 1,3 \geq 0$$

$$-0,04x \geq -1,3$$

$$x \leq \frac{-1,3}{-0,04}$$

$$x \leq 32,5$$

d'où, pour $x \in [0; 20]$, $h'(x) > 0$

done, pour $x \in [0; 20]$, h est croissante

b) Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$

Soit $P(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$" 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20 "$$

Initialisation : $n=0$

$$u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1,28$$

$$\text{d'où } 1 \leq u_0 < u_1 \leq 20$$

donc $P(n)$ est vraie pour $n=0$

Hérédité

Soit k un entier naturel quelconque fixé

Supposons que $P(k)$ soit vraie c'est à dire " $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 20$ "

Démontrons que $P(k+1)$ est vraie c'est à dire " $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 20$ "

On a : $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 20$ d'après l'hypothèse de récurrence

$h(1) \leq h(u_k) \leq h(u_{k+1}) \leq h(20)$ car la fonction h
est croissante sur $[0, 20]$

$$1,28 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 18 \text{ car } h(1) = 1,28 \\ h(20) = 18$$

$$1 \leq 1,28 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 18 \leq 20$$

$$1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 20$$

donc si $P(k)$ est vraie alors $P(k+1)$ l'est aussi.

Conclusion

la propriété $P(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire

donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n

c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N} . 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

c. D'après la question 2.c. on en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée par 20 donc elle converge vers un réel L .

d. Par unicité de la limite, on a :

$$L = h(L)$$

$$L = -0,02L^2 + 1,3L$$

$$0,02L^2 - 0,3L = 0$$

$$L(0,02L - 0,3) = 0$$

$$\text{d'où } L = 0 \quad \text{ou} \quad 0,02L - 0,3 = 0$$

$$0,02L = 0,3$$

$$L = \frac{0,3}{0,02}$$

$$L = 15$$

$$\text{Or } 1 \leq u_n \leq 20$$

$$\text{donc } \underline{L = 15}.$$

3. On cherche au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 ha.

a) D'après ce modèle, la suite (u_n) est croissante, $u_0 = 1$ et sa limite est 15 donc il existe un entier N_0 tel que pour $n \geq N_0$; $u_n \geq 14$.

b) Programme seuil

def seuil () :

$n = 0$

$\mu = 1$

while $\mu \leq 14$

$n = n + 1$

$\mu = -0.02 * \mu * 2 + 1.3 * \mu$

return n

Exercice 4

$$f(x) = \frac{5}{1-e^x}$$

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 = 5$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-e^x) = -\infty$

donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{1-e^x} = 0$

b) la courbe C_f représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

2. a) Signe $1 - e^x$ sur $]0; +\infty[$

1^{re} méthode

$$1 - e^x > 0$$

$$-e^x > -1$$

$$e^x < 1$$

$$e^x < e^0$$

$$x < 0$$

2^{de} méthode

$$x > 0$$

$$e^x > e^0 \text{ car } e^x \nearrow \text{ sur }]0; +\infty[$$

$$-e^x < -1$$

$$1 - e^x < 0$$

donc sur $]0; +\infty[$, $1 - e^x < 0$.

b) Limite de f en 0^+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 5 = 5$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 - e^x = 0^-$$

donc, par quotient des limites, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

c) Interprétation graphique

La courbe C_f représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$ au voisinage de 0.