

Sujet B p 264

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(x))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

donc par quotient des limites, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} 2) \text{ a) } 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 &= 4 \frac{(\ln(\sqrt{x}))^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \frac{\left(\frac{1}{2} \ln(x) \right)^2}{x} \\ &= 4 \times \frac{\frac{1}{4} \times (\ln(x))^2}{x} \\ &= \frac{4 \times \frac{1}{4} (\ln(x))^2}{x} \\ &= \frac{(\ln(x))^2}{x} = f(x) \end{aligned}$$

b) L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

L'équation de l'axe des abscisses est $y = 0$.

On a : $f(x) = 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2$

On pose $X = \sqrt{x}$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$

d'où par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale

d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$.

3. a) Calcul de $f'(x)$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec

$$u(x) = (\ln(x))^2 \quad d'ou \quad u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$$

$$v(x) = x \quad d'ou \quad v'(x) = 1$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2 \times 1}{x^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2}$$

$$= \frac{\ln(x) (2 - \ln(x))}{x^2}$$

b) Signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

$$x^2 > 0$$

$$\ln(x) \geq 0$$

$$x \geq e^0$$

$$x \geq 1$$

$$2 - \ln(x) > 0$$

$$-\ln(x) > -2$$

$$\ln(x) \leq 2$$

$$x \leq e^2$$

car $e^x \nearrow$ sur $\mathbb{R}$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$\ln(x)$	-	0	+	+
$2 - \ln(x)$	+	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+	-

$$\text{Sur }]0; 1[\cup]e^2; +\infty[\quad f'(x) < 0$$

$$\text{Sur } [1; e^2] ; f'(x) \geq 0$$

$$c) f(1) = \frac{(\ln(1))^2}{1} = \frac{0^2}{1} = 0$$

$$f(e^2) = \frac{(\ln(e^2))^2}{e^2} = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} = 4e^{-2} \simeq 0,54$$

4. Démontrons $f(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$

Sur $]0; 1[$

f est continue et strictement décroissante sur $]0; 1[$.

De plus, 1 appartient à $[0; +\infty[$

donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $]0; 1[$.

Sur $[1; +\infty[$

Sur $[1; +\infty[$, le maximum de f est $\frac{4}{e^2} \simeq 0,54$

donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Conclusion

L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0; +\infty[$

A la calculatrice, $\alpha \simeq 0,4948 \rightarrow 0,49 \leq \alpha \leq 0,50$.