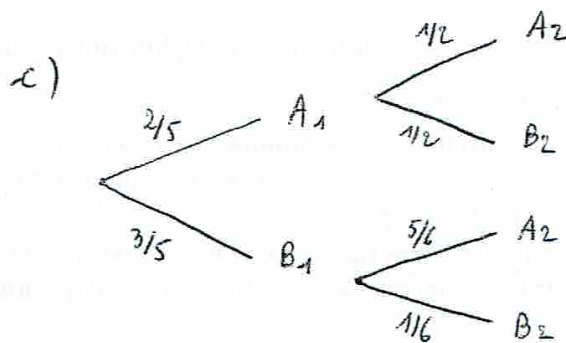


Exercice 1 (5 points)Partie A

$$1. a) P(A_1) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$b) P_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$



$$d) P(A_1 \cap B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned} 2) P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2) \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$f) P_{B_2}(A_1) = \frac{P(A_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{7}{10}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{10-7}{10}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{5} \times \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

Partie B

1. On répète, de façon indépendante, 10 épreuves de Bernoulli dont la probabilité de succès est 0,34. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre $n=10$ et $p=0,34$. $B(10; 0,34)$

$$2. P(X=5) = C_5^{10} \times 0,34^5 \times 0,66^5 \approx 0,1434$$

$$3. P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,66^{10} \approx 1 - 0,0157 \approx 0,9843$$

Exercice 2: (3,5 points)

1. On a $T_0 = 0,9$, puis $T_1 = T_0 - 0, T_0^2 = 0,9 - 0,1 \times 0,81 = 0,9 - 0,081 = 0,819$;
 $T_2 = T_1 - 0,1 \times T_1^2 = 0,751924 \approx 0,752$; $T_3 = T_2 - 0,1 \times T_2^2 \approx 0,695$ et enfin $T_4 = T_3 - 0,1 \times T_3^2 \approx 0,647$.

Donc l'estimation de 0,4 est loin du modèle.

2. a. La fonction polynôme f est dérivable sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :
 $f'(x) = 1 - 2 \times 0,1x = 1 - 0,2x$.
Or $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,2x \leq 0,2 \Rightarrow -0,2 \leq -0,2x \leq 0 \Rightarrow 0,8 \leq 1 - 0,2x \leq 1$, ce qui montre que $f'(x) > 0$ sur $[0; 1]$: la fonction f est donc croissante sur $[0; 1]$ de $f(0) = 0$ à $f(1) = 1 - 0,1 = 0,9$.
- b. *Initialisation* : on a vu que $0 < 0,819 < 0,9 < 1$ ou $0 < T_1 < T_0 < 1$: l'encadrement est vrai au rang 0;
Hérédité supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
 $0 < T_{n+1} < T_n < 1$. par croissance de la fonction f on a :
 $f(0) < f(T_{n+1}) < f(T_n) < f(1)$ ou $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 0,9$.
On a donc $0 < T_{n+2} < T_{n+1} < 1$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit le naturel n , $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.
- c. La suite (T_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente vers une limite $\ell \geq 0$.
- d. La calculatrice donne $T_{14} \approx 0,385$: les spécialistes ont donc raison. $T_{20} \approx 0,31$

Exercice 3 : (5 points)

Partie A

1. a. $g(x) = (x + 1)e^{-x} + 1$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$. En multipliant on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1)e^{-x} = -\infty$ et finalement $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$.

b. $g(x) = (x + 1)e^{-x} + 1 = xe^{-x} + e^{-x} + 1 = -(-xe^{-x}) + e^{-x} + 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{-x} = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \end{cases}$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ car $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1}$.

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $u \times v + 1$. Donc $g' = u' \times v + u \times v'$.

On a $u(x) = x + 1$ et $v(x) = e^{-x}$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Donc $g'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + 1) \times (-e^{-x}) = [1 - (x + 1)] \times e^{-x} = -xe^{-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	-	
e^{-x}		+	1	+	
$g'(x)$		+	0	-	
g	$-\infty$				

3. a. La fonction g est continue et strictement croissante sur $] -\infty ; 0]$. Le nombre 0 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(0) = 2$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $] -\infty ; 0]$.

b. A la calculatrice on trouve : $\boxed{-1.28 < \alpha < -1.27}$.

c. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$.

4.

x	$-\infty$	α	0		$+\infty$
g	$-\infty$	0	2		
$g(x)$	-	0		+	

Partie B

1. a. $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1} + 2$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{-x}+1} = +\infty$. D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

b. $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1} + 2 = \frac{xe^x}{(e^{-x}+1)e^x} + 2 = \frac{xe^x}{e^{-x} \times e^x + e^x} + 2 = \frac{xe^x}{1+e^x} + 2$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{1+e^x} = 0$. D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2}$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à C_f .

2. $f(x) = \frac{x}{e^{-x}+1} + 2$. f est de la forme $\frac{u}{v} + 2$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

On a $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x} + 1$ donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

$$f'(x) = \frac{1 \times (e^{-x}+1) - x \times (-e^{-x})}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{e^{-x}+1+xe^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{(x+1)e^{-x}+1}{(e^{-x}+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^{-x}+1)^2}.$$

3. $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ car $(e^{-x} + 1)^2 > 0$ pour tout réel.

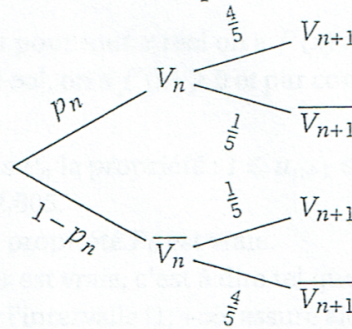
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		-	+
f	2	$f(\alpha)$	$+\infty$

4. $f(\alpha) = \frac{\alpha}{e^{-\alpha}+1} + 2 = \frac{\alpha}{\frac{-1}{\alpha+1}+1} + 2 = \frac{\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha+1}} + 2 = \alpha \times \frac{\alpha+1}{\alpha} + 2 = \alpha + 1 + 2 = \alpha + 3$.

On a $-1.28 < \alpha < -1.27$ donc $-1.28 + 3 < \alpha + 3 < -1.27 + 3$. D'où $\boxed{1.72 < f(\alpha) < 1.73}$.

Exercice 4 : (3,5 points)

1. a. Les informations de l'énoncé permettent de compléter l'arbre comme suit :



- b. Soit n un entier naturel strictement positif. Les événements V_n et $\overline{V}_n$ forment une partition de l'univers, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(V_{n+1}) = p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5}$$

2. a. Soit n un entier strictement positif. On a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{5}p_n - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme $u_1 = \frac{3}{10}$ et de raison $q = \frac{3}{5}$.

- b. Comme la suite (u_n) est géométrique, pour tout n entier strictement positif on a :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

On en déduit alors que pour tout n entier strictement positif on a :

$$p_n = \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

- c. Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 0$.

Par somme, on a alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Ce résultat indique que, dans ce pays, une information que l'on reçoit après qu'elle a transité par un grand nombre d'intermédiaires a autant de chances d'être vraie que d'être fausse.

Exercice 5 : (4 points)

Partie A

1. La fonction p est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$.

$$\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3 ; 4], p'(x) > 0$.
Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3 ; 4]$.

2. $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3 ; 4]$ à valeurs dans $[-68 ; 37]$. Or $0 \in [-68 ; 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[-3 ; 4]$.

3. À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. D'après les variations de la fonction p , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3 ; 4]$:

x	-3	α	4
$p(x)$	-	0	+

Partie B

1. a. La fonction f est continue et dérivable sur $[-3 ; 4]$ (car $\forall x \in [-3 ; 4], 1 + x^2 \neq 0$).

$$\forall x \in [-3 ; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$\text{b. } f'(x) = 0 \iff \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2} = 0 \iff (x - 1)^2 e^x \iff (x - 1)^2 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Et $f(1) = \frac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{e}{2}$.

2. a. Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3 ; 0]$;
- concave sur $[0 ; 1]$;
- convexe sur $[1 ; 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

$$\text{b. } \forall x \in [-3 ; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x - 1)e^x}{(1 + x^2)^3}$$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3 ; 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3 ; 4], (1 + x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x - 1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3	α	1	4
$p(x)$	-	0	+	+
$x - 1$	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	+

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

Exercice 6 : (4 points)

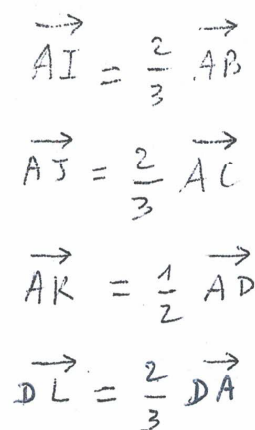
Partie A

1) Montrons que les vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

$$\begin{aligned}\text{On a : } \vec{AE} &= \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{CD} - \frac{1}{2} \vec{BD} \\ &= \vec{AB} + \frac{1}{2} (\vec{CA} + \vec{AD}) - \frac{1}{2} (\vec{BA} + \vec{AD}) \\ &= \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{AD} - \frac{1}{2} \vec{BA} - \frac{1}{2} \vec{AD} \\ &= \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AB} \\ &= \frac{3}{2} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}\end{aligned}$$

d'où $\vec{AE} = \frac{3}{2} \vec{AB} - \frac{1}{2} \vec{AC}$

donc les vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.



$$\vec{AI} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{2} \vec{AD}$$

$$\vec{DL} = \frac{2}{3} \vec{DA}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{a) } \vec{I \cdot J} &= \vec{I} \vec{A} + \vec{A} \vec{J} \\ &= -\frac{2}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AC} \\ &= \frac{2}{3} (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{2}{3} \vec{BC} \end{aligned}$$

$$b) \vec{CK} = \vec{CA} + \vec{AK} = -\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$\begin{aligned}\vec{JL} &= \vec{JA} + \vec{AD} + \vec{DL} = -\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{AC} + \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DA} = \frac{2}{3}\left(-\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{AC} + \vec{AD} - \frac{2}{3}\vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{CK}.\end{aligned}$$

c) Deux vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{JL}$ non colinéaires du plan (IJL) sont égaux à 2 vecteurs $\frac{2}{3}\vec{BC}$ et $\frac{2}{3}\vec{CK}$ non colinéaires du plan (BCK) donc $(IJL) \parallel (BCK)$.

Partie B :

1) a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) 1^{re} méthode

les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles

$$2 \times 1 = 2 \quad \text{et} \quad 2 \times 3 = 6 \neq 1$$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc (d) et (d') ne sont pas parallèles.

2^{ème} méthode

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k

tel que $\vec{v} = k \vec{u}$

on a donc le système :

$$\begin{cases} 2 = k \times 1 & (1) \\ 1 = k \times 3 & (2) \\ -1 = k \times 0 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \rightarrow k = 2 ; \quad (2) \rightarrow k = \frac{1}{3} ; \quad (3) \text{ impossible}$$

le système n'a pas de solutions

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc d et d' ne sont pas parallèles.

2) a) d et d' sont-elles sécantes ?

d et d' sont sécantes si et seulement si, il existe un couple $(k; k')$ de réels solution du système :

$$\begin{cases} 3+k = 0,5+2k' & (1) \\ 9+3k = 4+k' & (2) \\ 2 = 4-k' & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k-2k' = -2,5 & (1) \\ 3k-k' = -5 & (2) \\ k' = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow k' = 2$$

$$(2) \rightarrow 3k = -5 + k' = -5 + 2 = -3 \text{ d'où } k = -1$$

Il faut vérifier la dernière équation c'est à dire l'équation (1) :

$$k - 2k' = -1 - 2 \times 2 = -1 - 4 = -5 \neq -2,5$$

l'équation (1) n'est pas vérifiée

d'où le système n'a pas de solution

donc, les droites d et d' ne sont pas sécantes.

b) d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes

donc elles sont non coplanaires (ne sont pas coplanaires).

c) Comme les 2 avions n'empruntent pas la même route aérienne ; ils ne pourront jamais se télescoper.