

Correction : n° 141 p 73

$$d: A(-1; 3; -3) \quad \vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d': B(1; 3; -1) \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrons que $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires

Il faut trouver 2 réels α et β tels que $\vec{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ 3 - 3 \\ -1 - (-3) \end{pmatrix}; \quad \vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour trouver α et β , il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 = \alpha \times (-3) + \beta \times (-2) \\ 0 = \alpha \times 2 + \beta \times 1 \\ 2 = \alpha \times 1 + \beta \times 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -3\alpha - 2\beta \\ 0 = 2\alpha + \beta \\ 2 = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = -2 & (1) \\ 2\alpha + \beta = 0 & (2) \\ \alpha = 2 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \rightarrow \alpha = 2$$

$$(2) \rightarrow \beta = -2\alpha = -2 \times 2 = -4$$

Vérifions la 3^{ème} équation (1) avec $\alpha = 2$ et $\beta = -4$

$$3 \times 2 + 2 \times (-4) = 6 + (-8) = -2$$

L'équation (1) est bien vérifiée

donc le système admet pour solution $\alpha = 2$ et $\beta = -4$

donc on a : $\vec{AB} = 2\vec{u} - 4\vec{v}$

On en déduit que $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

2) Justifions que d et d' sont sécantes

Comme $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, les droites d et d' le sont aussi.

Il faut montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

1^{ère} méthode

$$x_{\vec{v}} = \frac{2}{3} x_{\vec{u}}$$

$$y_{\vec{v}} = \frac{1}{2} y_{\vec{u}} \neq \frac{2}{3} y_{\vec{u}}$$

d'où il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

d'où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

donc d et d' sont sécantes
car elles sont coplanaires.

2^{ème} méthode

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

On va résoudre le système :

$$\begin{cases} -2 = k \times (-3) \\ 1 = k \times 2 \\ 0 = k \times 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = 0 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution

d'où il n'existe pas de réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
donc d et d' sont sécantes.

3) Déterminons les coordonnées de leur point d'intersection

Une représentation graphique de d est :

$$\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

Une représentation graphique de d' est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 + k \\ z = -1 \end{cases}$$

Pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on va résoudre le système :

$$\begin{cases} -1 - 3t = 1 - 2k \\ 3 + 2t = 3 + k \\ -3 + t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3t + 2k = 2 & (1) \\ 2t - k = 0 & (2) \\ t = 2 & (3) \end{cases}$$

On prend les équations (2) et (3)

$$(3) \rightarrow t = 2$$

$$(2) \rightarrow -k = -2t \\ k = 2t = 2 \times 2 = 4$$

On vérifie dans la dernière équation (1)

$$-3 \times 2 + 2 \times 4 = -6 + 8 = 2$$

L'équation (1) est vérifiée donc le système a pour solution
 $t = 2$ et $k = 4$

donc le point d'intersection de d et d' est le point de d
de paramètre $t = 2$ et de d' de paramètre $k = 4$.

$$\text{d'où } \begin{cases} x_c = -1 - 3 \times 2 = -7 \\ y_c = 3 + 2 \times 2 = 7 \\ z_c = -3 + 2 = -1 \end{cases}$$

donc $C(-7; 7; -1)$
(On peut prendre d' avec $k = 4$) $3/3$